גיאומטריה

חזרה
שטחים

1 יחידת שטח = שטח ריבוע שאורך צלעו 1 יחידה.

שטח ריבוע כזה הוא 1 יחידה ריבועית.

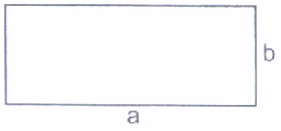
דוגמה ליחידת שטח:

סמ"ר (ריבוע שאורך צלעו 1 ס"מ).

מלבן

שטח מלבן שווה למכפלה של שתי צלעות סמוכות.

$$S_{\text{מלבן}} = a \cdot b$$



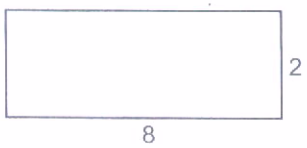
דוגמה:

נחשב את שטח המלבן שאורך צלעותיו: 2 ס"מ ו- 8 ס"מ.

$$S = 2 \cdot 8$$

$$S = 16$$

שטח המלבן: **16 סמ"ר**.

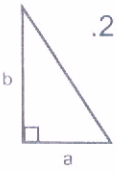


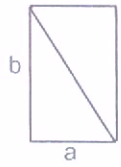
סרטוט מוקטן

משולש ישר זווית

שטח משולש ישר זווית שווה למכפלת הניצבים לחלק ל- 2.

$$S_{\text{משולש ישר זווית}} = \frac{a \cdot b}{2}$$





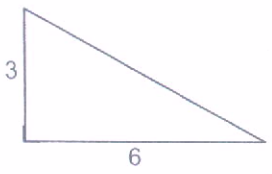
האלכסון במלבן מחלק את המלבן לשני משולשים ישרי זווית.
שטח כל משולש כזה שווה למחצית שטח המלבן.

דוגמה:

נחשב את שטחו של משולש ישר זווית שניצביו 6 ס"מ ו- 3 ס"מ.

$$S = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

שטח המשולש הוא **9 סמ"ר**.



סרטוט מוקטן

משולש

שטח משולש שווה למכפלה של צלע בגובה לאותה צלע לחלק ל- 2.

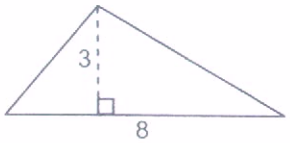
$$S_{\text{משולש}} = \frac{a \cdot h}{2}$$

דוגמה:

נחשב את שטח משולש שצלעו האחת 8 ס"מ והגובה לצלע זאת 3 ס"מ.

$$S = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$

שטח המשולש הוא **12 סמ"ר**.



סרטוט מוקטן

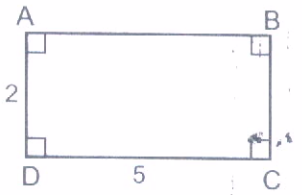
© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

בתרגילים 1 – 3
כל הסרטוטים מוקטנים.
המידות בס"מ.

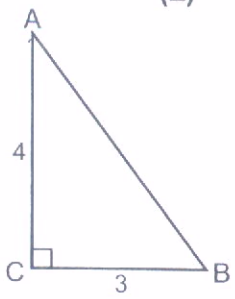
תרגילים

1. חשבו את שטחי המצולעים הבאים.

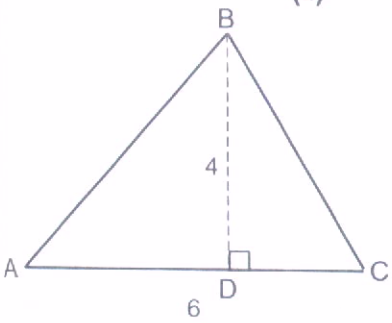
(א)



(ב)

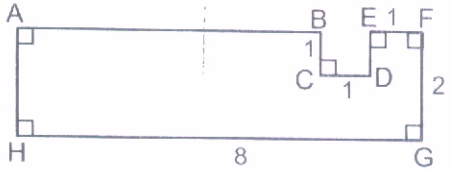


(ג)

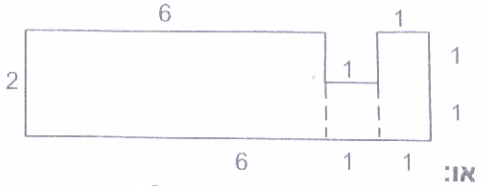


2. חשבו את שטחי המצולעים הבאים.
חלקו כל מצולע למלבנים ולמשולשים שאת שטחם אתם יודעים לחשב.

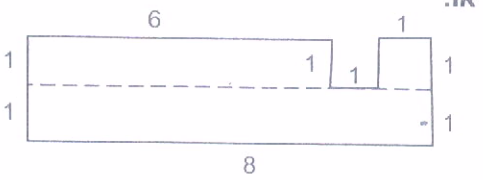
(א)



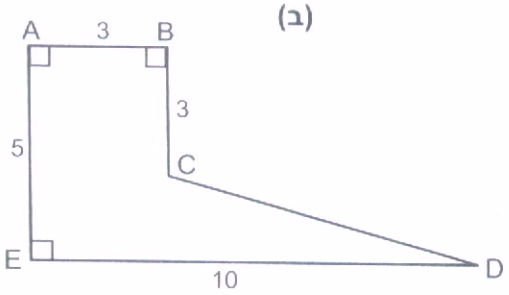
ניתן לחלק את המצולע לשלושה מלבנים:



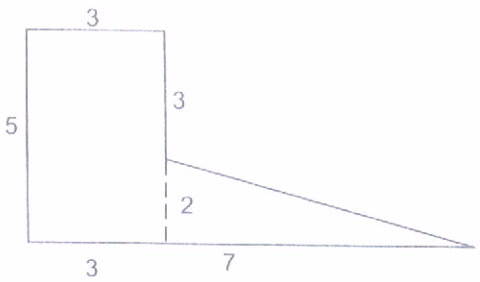
או:



(ב)

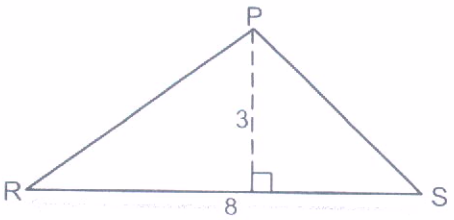


ניתן לחלק את המצולע למלבן ולמשולש ישר זווית.

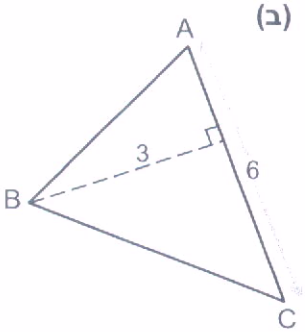


3. חשבו את שטחי המשולשים הבאים.

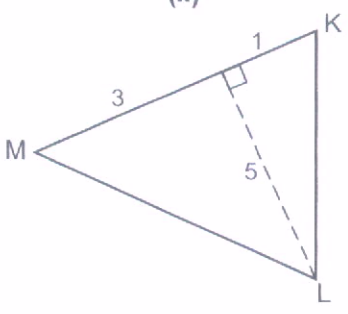
(א)



(ב)

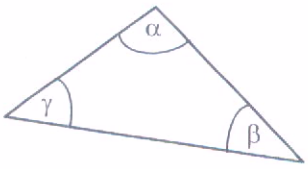


(ג)



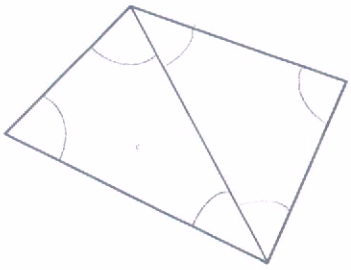
© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

סכום הזוויות במשולש ובמרובע



משולש

סכום הזוויות **במשולש** הוא **180°**: $(\alpha + \beta + \gamma = 180)$



מרובע

סכום הזוויות **במרובע** הוא **360°**.

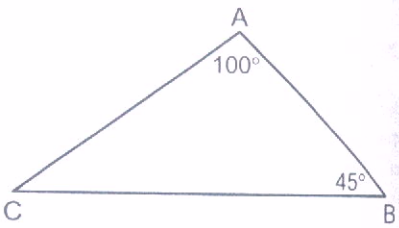
כל מרובע ניתן לחלק לשני משולשים באמצעות העברת אלכסון.
סכום הזוויות במרובע שווה לסכום הזוויות של שני המשולשים:

$(2 \cdot 180 = 360)$

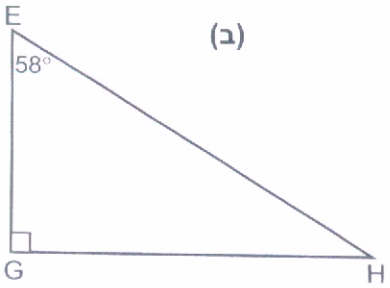
תרגילים

4. בכל משולש, חשבו את ערכה של הזווית השלישית.

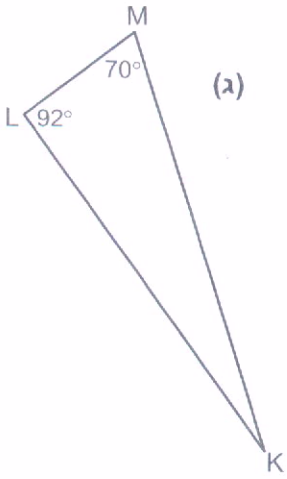
(א)



(ב)

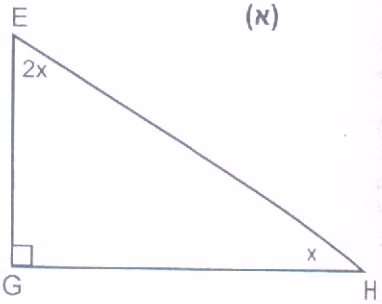


(ג)

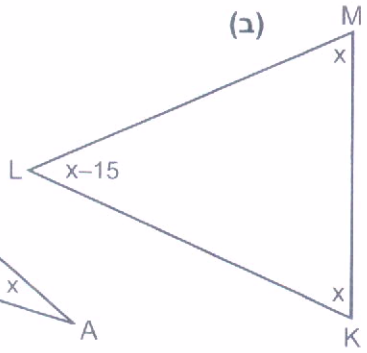


5. חשבו את ערכן של הזוויות במשולשים הבאים.
כתבו משוואה, חשבו את x ומצאו את גודל הזוויות.

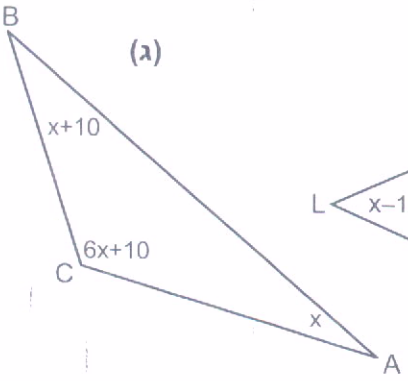
(א)



(ב)

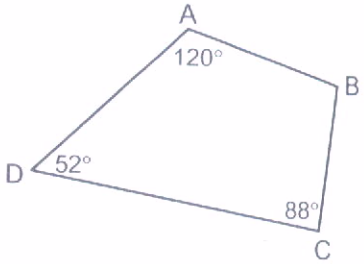


(ג)

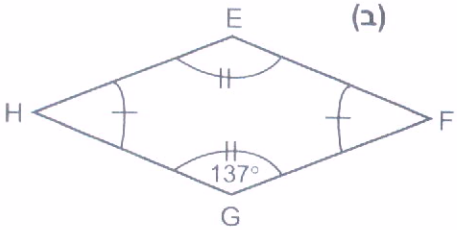


6. חשבו את ערכן של הזוויות החסרות במרובעים הבאים.

(א)



(ב)



© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

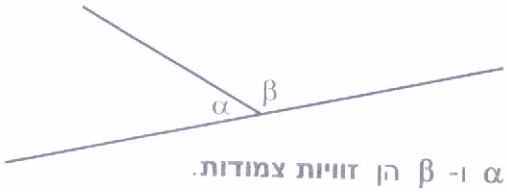
זוויות צמודות וזוויות קדקודיות

זוויות צמודות הן שתי זוויות בעלות:

(א) קדקוד משותף.

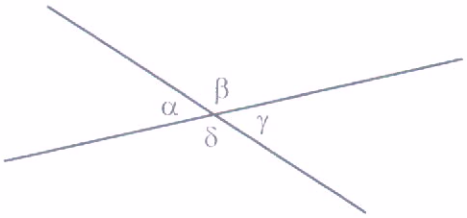
(ב) שוק אחת משותפת.

(ג) שתי השוקיים האחרות מונחות על ישר אחד.



α ו- β הן **זוויות צמודות**.

כאשר נתונים שני ישרים נחתכים, כל שתי זוויות שאינן צמודות הן **זוויות קדקודיות**.



α ו- γ הן **זוויות קדקודיות**.

β ו- δ הן **זוויות קדקודיות**.

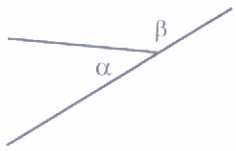
תרגילים

7. בכל אחד מהסרטוטים הבאים מסומנות שתי זוויות: α , β.

(1) ציינו האם הזוויות צמודות.

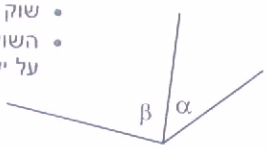
(א)

- קדקוד משותף.
- שוק משותפת.
- השוקיים האחרות על ישר אחד.



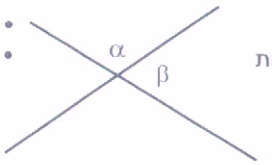
(ב)

- קדקוד משותף.
- שוק משותפת.
- השוקיים האחרות על ישר אחד.



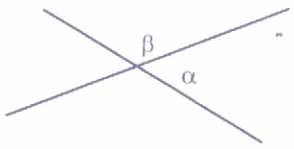
(ג)

- קדקוד משותף.
- שוק משותפת.
- השוקיים האחרות על ישר אחד.

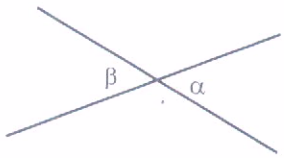


(2) ציינו האם הזוויות קודקודיות.

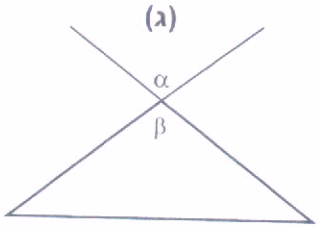
(א)



(ב)

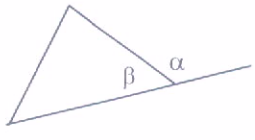


(ג)

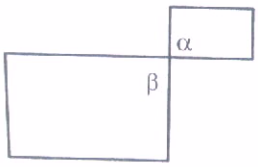


(3) ציינו האם הזוויות צמודות, קודקודיות, או לא זה ולא זה.

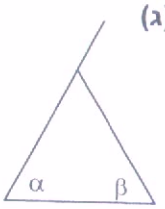
(א)



(ב)

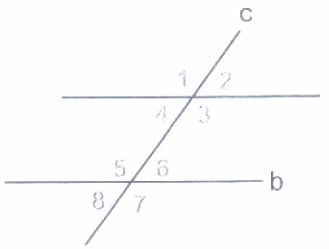


(ג)



© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

זוויות בין ישרים מקבילים



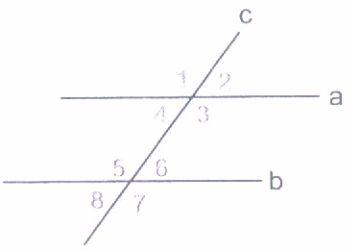
בסרטוט שני ישרים מקבילים: **a || b** וישר שלישי **c** החותך אותם.
בנקודת החיתוך של הישרים a ו- c נוצרות 4 זוויות, צבועות באדום.
בנקודת החיתוך של הישרים b ו- c נוצרות 4 זוויות, צבועות בכחול.

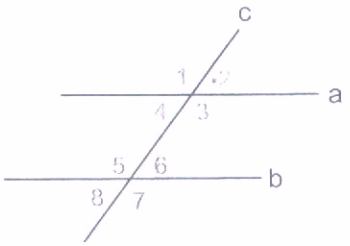
בפרק הקודם ערכנו מיון של זוויות בעלות קדקוד משותף (שתיהן צבועות באותו צבע), לזוויות צמודות ולזוויות קדקודיות. מיינו.

בפרק זה נמיין אחרת. מיון לזוגות של זוויות, אחת הצבועה **באדום** והאחרת הצבועה **בכחול**.
המיון הוא לזוויות מתאימות ולזוויות מתחלפות.

זוויות מתאימות

- אין להן קדקוד משותף.
- שתיהן מאותו צד של הישר החותך.
- שתיהן מאותו צד של הישרים המקבילים.



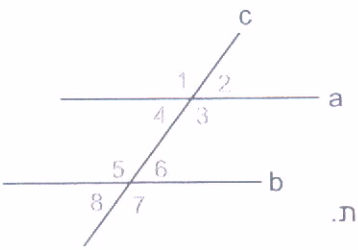


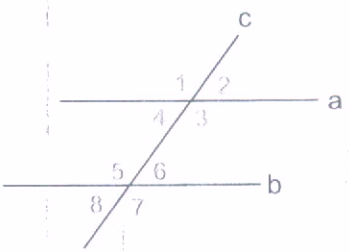
$\sphericalangle 4$ ו- $\sphericalangle 8$ הן **זוויות מתאימות**.
$\sphericalangle 2$ ו- $\sphericalangle 6$ הן **זוויות מתאימות**.

כתבו את הזוגות הנוספים של זוויות מתאימות. (יש עוד 2 זוגות כאלו.)

זוויות מתחלפות

- אין להן קדקוד משותף.
- שתיהן מצדדים שונים של הישר החותך.
- שתיהן זוויות פנימיות או שתיהן זוויות חיצוניות.





$\sphericalangle 3$ ו- $\sphericalangle 5$ הן **זוויות מתחלפות** (פנימיות).
$\sphericalangle 2$ ו- $\sphericalangle 8$ הן **זוויות מתחלפות** (חיצוניות).

כתבו את הזוגות הנוספים של זוויות מתחלפות. (יש עוד 2 זוגות כאלו.)

מה למדנו על זוויות מתאימות ועל זוויות מתחלפות בין מקבילים?

כל זוג **זוויות מתאימות** בין ישרים **מקבילים** הן זוויות **שוות**.

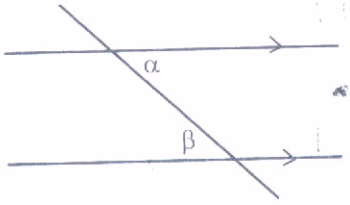
כל זוג **זוויות מתחלפות** בין ישרים **מקבילים** הן זוויות **שוות**.

תרגילים

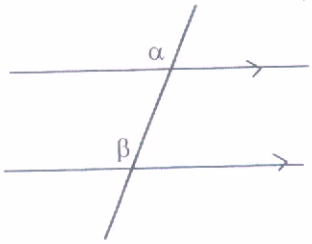
סימון לישרים מקבילים:

8. לפניכם שני ישרים מקבילים הנחתכים על-ידי ישר שלישי.
שתיים מהזוויות מסומנות ב- α וב- β.
קבעו אם אלו זוויות מתאימות, זוויות מתחלפות, או זוויות שאינן מתאימות ואינן מתחלפות.

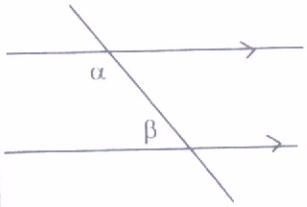
(א)



(ב)

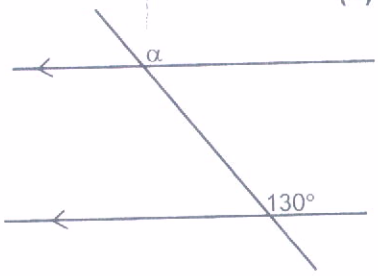


(ג)

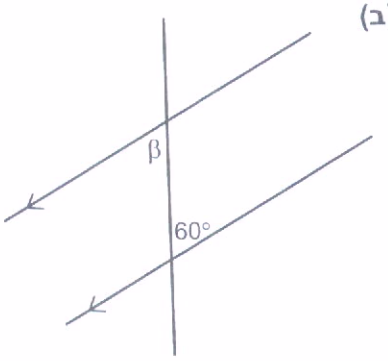


9. בכל אחד מהסרטוטים שלפניכם נתונים שני ישרים מקבילים הנחתכים על-ידי ישר שלישי.
אחת מהזוויות נתונה בסרטוט.
חשבו את הגודל של הזוויות המסומנות באותיות. הסבירו.

(א)

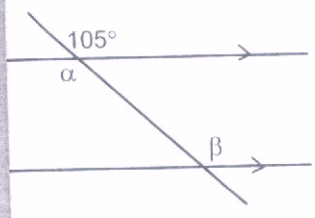


(ב)



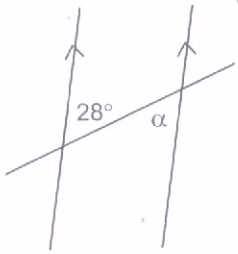
זוויות קודקודיות שוות

(ג)

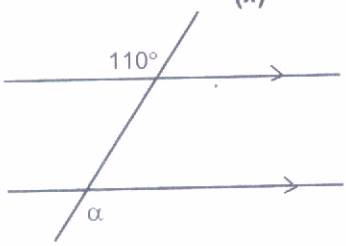


10. בכל סרטוט חשבו את גודל הזוויות המסומנות באותיות. הסבירו.

(א)

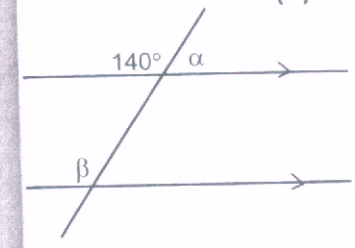


(ג)

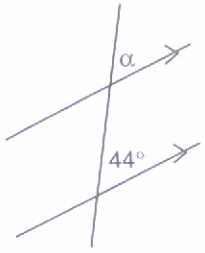


זוויות צמודות סכומן 180°

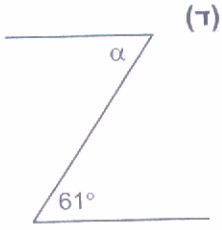
(ה)



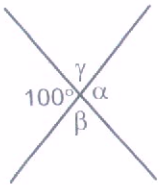
(ב)



(ד)



(ו)

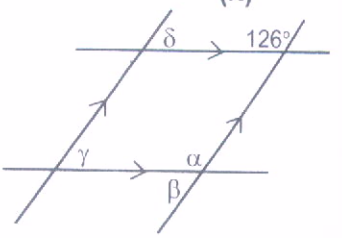


© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

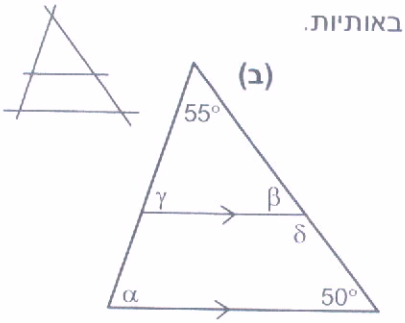
11. בכל סרטוט יש שני זוגות של ישרים מקבילים.

חשבו את גודל הזוויות המסומנות באותיות.

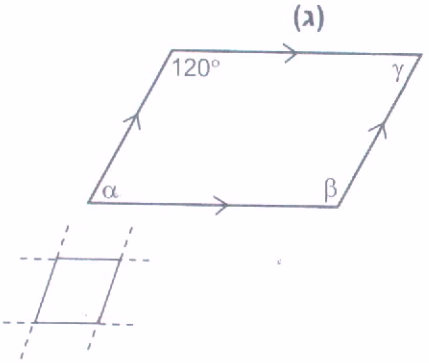
(א)



(ב)



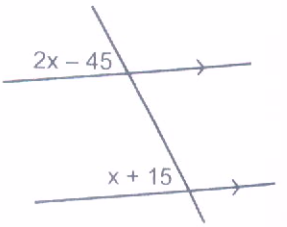
(ג)



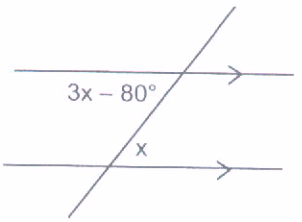
12. לפניכם זוגות של ישרים מקבילים.

חשבו את x ואת גודל הזוויות הנתונות באמצעות ביטויים אלגבריים.

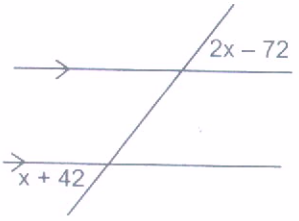
(א)



(ב)



(ג)



כתבו משוואה ומצאו את x.

הציבו את הערך של x וחשבו את גודל הזוויות.

מה למדנו?

(1) שטח מלבן שווה למכפלת שתי צלעות סמוכות.

(2) שטח משולש ישר זווית שווה למכפלת הניצבים לחלק ב- 2.

(3) שטח משולש שווה לצלע כפול הגובה לאותה צלע לחלק ב- 2.

(4) סכום הזוויות במשולש הוא 180°.

(5) סכום הזוויות במרובע הוא 360°.

(6) סכום זוויות צמודות הוא 180°.

(7) זוויות קדקודיות הן זוויות שוות.

(8) זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים הן זוויות שוות.

(9) זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים הן זוויות שוות.

בהמשך לימודי הגיאומטריה רשימה זו תלך ותגדל.

נקרא לה **ארגז הכלים**.

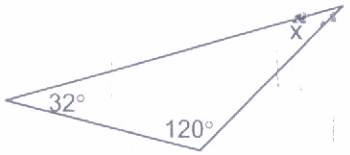
© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

נחזור ונתרגל

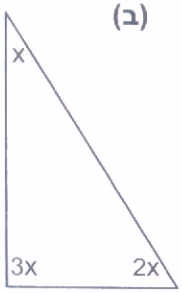
- סכום הזוויות במשולש $180°$.
- סכום הזוויות במרובע $360°$.
- סכום זוויות צמודות $180°$.
- זוויות קדקודיות שוות זו לזו.

1. לפניכם סרטוטים של שלושה משולשים. חשבו את גודל הזוויות החסרות בכל אחד מהם.

(א)

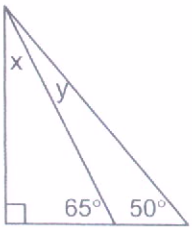


(ב)



כתבו משוואה
מתאימה ופתרו.

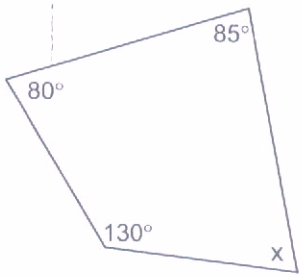
(ג)



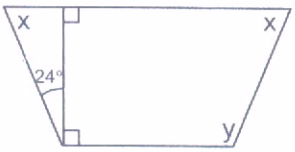
חשבו קודם את x
ואחר-כך את y.

2. לפניכם סרטוטים של שלושה מרובעים. חשבו את גודל הזוויות החסרות בכל אחד מהם.

(א)



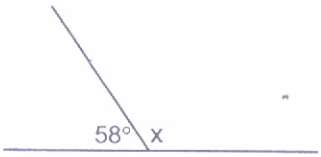
(ב)



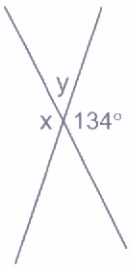
(ג)

3. בסרטוטים הבאים נתון הגודל של חלק מהזוויות.
הגודל של הזוויות האחרות מוצג באמצעות ביטויים אלגבריים. חשבו את גודל הזוויות.

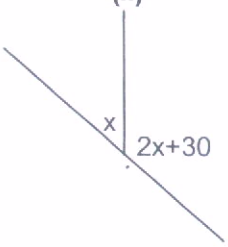
(א)



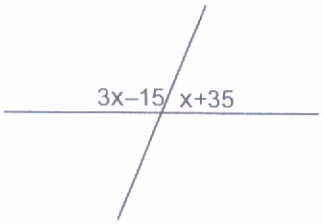
(ב)

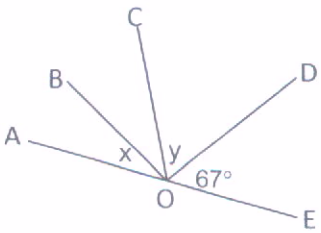


(ג)



(ד)





OB חוצה ∢AOC
OD חוצה ∢COE

© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

משולשים חופפים

פעילות 1

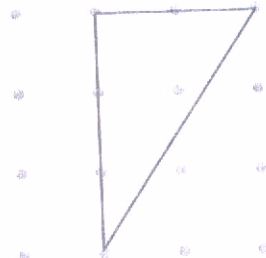
שני משולשים חופפים אם כאשר נניח אותם אחד על השני הם יכסו בדיוק זה את זה.

לפניכם סרטוטים של שישה משולשים על לוח נקודות.

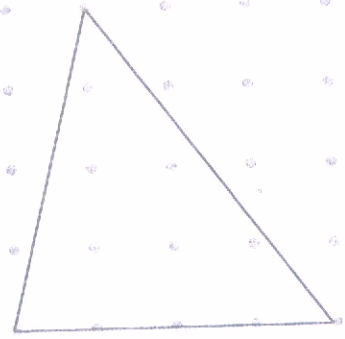
לכל אחד מהמשולשים סרטטו משולש החופף למשולש הנתון.

הקפידו שקדקודי המשולש יהיו נקודות בלוח הנקודות.

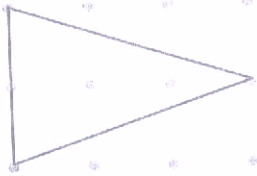
(א)



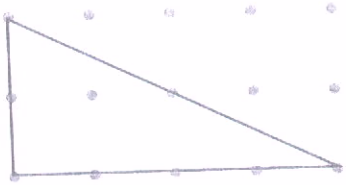
(ב)



(ג)

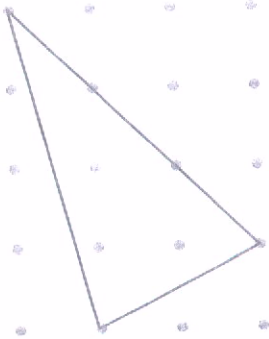


(ד)



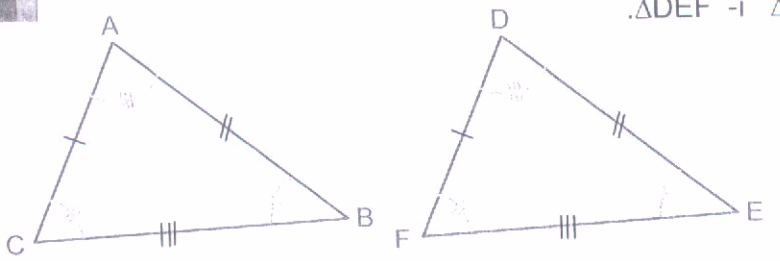
(ה)

(ו)



© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

לפניכם שני משולשים חופפים ΔABC ו- ΔDEF.



מה אנו יודעים על שני משולשים אלו?

כשנניח את המשולש הירוק על המשולש הכחול, קדקוד A יכסה את קדקוד D.
קדקוד B יכסה את קדקוד E.
קדקוד C יכסה את קדקוד F.

קדקודים מתאימים.

לכל משולש 3 צלעות ו- 3 זוויות

בין שני משולשים חופפים מתקיימים 6 שוויונות:

$AB = DE$
$AC = DF$
$BC = EF$

צלעות מתאימות.

$\sphericalangle A = \sphericalangle D$
$\sphericalangle B = \sphericalangle E$
$\sphericalangle C = \sphericalangle F$

זוויות מתאימות.

הסימן לחפיפה הוא: $\cong$. כותבים: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

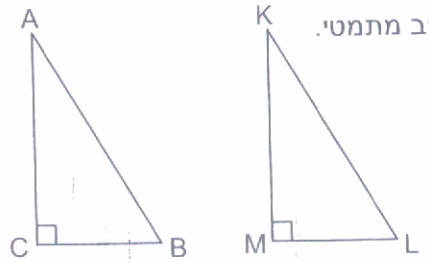
אומרים: משולש ABC חופף למשולש DEF.

בכתיבת החפיפה מקובל לרשום את סדר הקדקודים שבכל משולש כך שיהיו קדקודים מתאימים:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

תרגילים

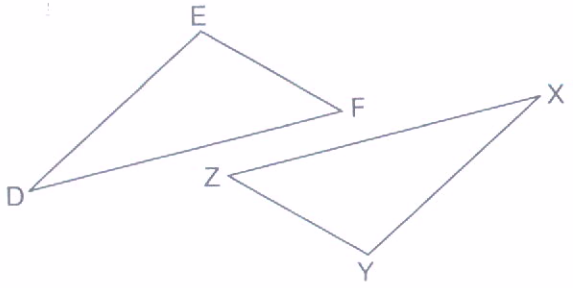
1. בסרטוט שלפניכם נתונים שני משולשים חופפים.



השלימו בטבלה את הקדקודים המתאימים וכתבו את החפיפה בכתיב מתמטי.
הקפידו על סדר רישום הקדקודים בשם המשולש.

ΔABC	A	B	C
Δ_____			

2. בסרטוט שלפניכם נתונים שני משולשים חופפים.

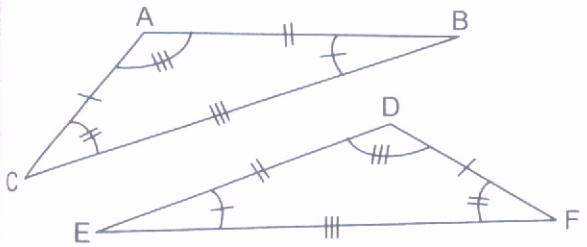


השלימו בטבלה את הקדקודים המתאימים וכתבו את החפיפה בכתיב מתמטי.

ΔDEF	D	E	F
Δ_____			

שני משולשים חופפים שווים באורך שלוש הצלעות שלהם בהתאמה, ובגודל שלוש הזוויות שלהם בהתאמה.
שני משולשים בהם מתקיימים שישה שוויונות אלו הם חופפים.

3. בשני המשולשים שלפניכם סימונים המעידים על חלקים שווים.



(א) השלימו:

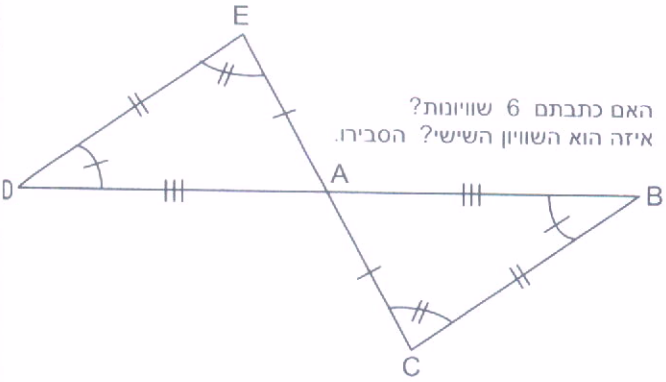
$\sphericalangle A =$ _____ $AB =$ _____

$\sphericalangle B =$ _____ $AC =$ _____

$\sphericalangle F =$ _____ $ED =$ _____

(ב) האם משולשים אלו הם משולשים חופפים? הסבירו.
כתבו את החפיפה בכתיב מתמטי.

4. התבוננו במשולשים שלפניכם.



האם כתבתם 6 שוויונות?
איזה הוא השוויון השישי? הסבירו.

(א) פרטו את החלקים (צלעות וזוויות) השווים.

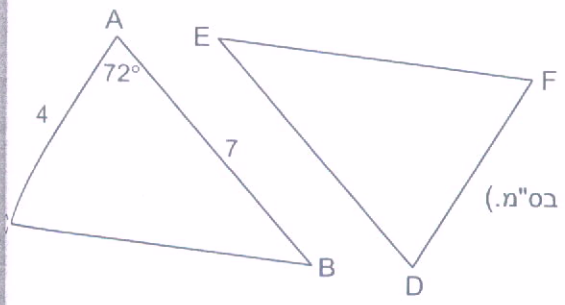
(ב) האם המשולשים חופפים? הסבירו.
כתבו את החפיפה בכתיב מתמטי.

5. המשולשים המוקטנים שלפניכם הם משולשים חופפים:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

(סדר האותיות הוא של קדקודים מתאימים.)

בסרטוט מידות של שתי צלעות וזווית של ΔABC. (האורכים בס"מ.)



השלימו את המידות הבאות:

$ED =$ _____

$DF =$ _____

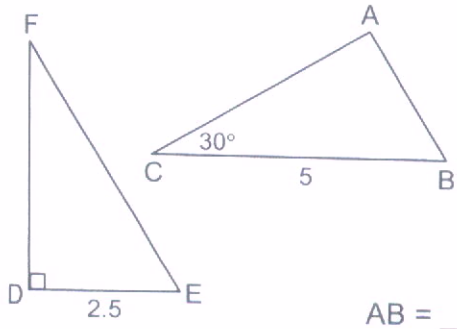
$\sphericalangle D =$ _____

6. המשולשים המוקטנים שלפניכם הם משולשים חופפים:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

(סדר האותיות הוא של קדקודים מתאימים.)

בסרטוט מידות של שתי צלעות וזווית של ΔABC. (האורכים בס"מ.)



השלימו את המידות הבאות:

$AB =$ _____ $EF =$ _____

$\sphericalangle A =$ _____ $\sphericalangle B =$ _____ $\sphericalangle F =$ _____

© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

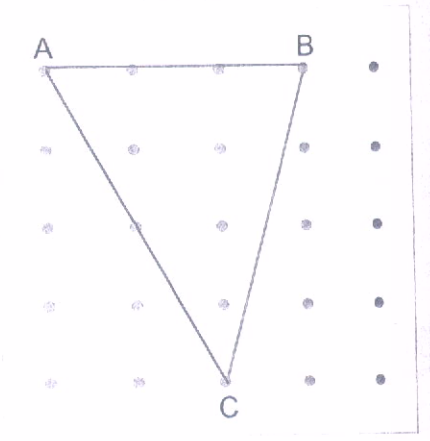
האם כדי לקבוע ששני משולשים הם משולשים חופפים יש להראות שמתקיימים כל שישה השוויונות האלו?

משפט חפיפה ראשון

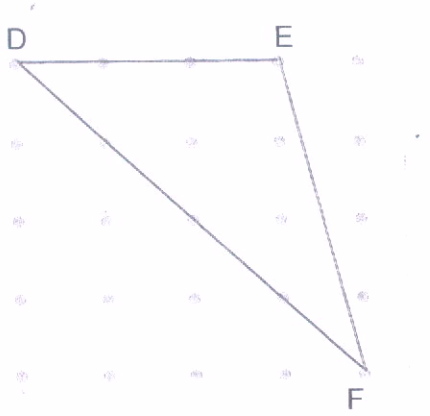
נבדוק אם שני משולשים בהם שתיים מהצלעות של משולש אחד שוות לשתיים מהצלעות של המשולש האחר, הם חופפים.

פעילות 2

משולש א



משולש ב



האם שני המשולשים חופפים?

בדקו.

מה נבדוק?

האם צלעות ΔABC שוות באורכן לצלעות ΔDEF ?

האם זוויות ΔABC שוות בגודלן לזוויות ΔDEF ?

שתי צלעות של משולש א שוות לשתי צלעות של משולש ב: $DE = AB$ ו- $EF = BC$,

אבל צלע DF ארוכה מצלע AC.

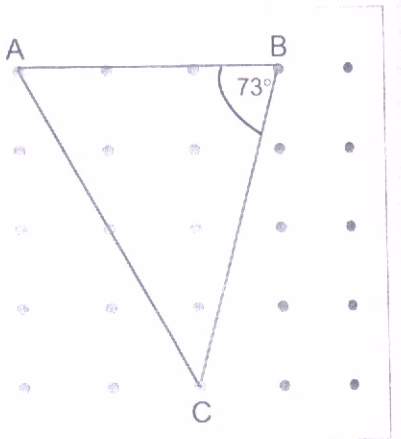
שני המשולשים (ABC ו- DEF) אינם חופפים.

פעילות 3

במשולש א, $\sphericalangle A = 73°$.

השלימו את הקטע DE הנתון למשולש DEF, כך ש: $EF = BC$ ו- $\sphericalangle E = 73°$.

משולש א



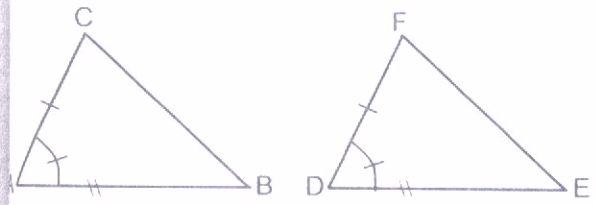
האם קיבלתם משולש DEF החופף למשולש ABC ? בדקו.

©כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

שני משולשים השווים בשתיים מצלעותיהם ובזווית הכלואה ביניהן הם משולשים חופפים.

טענה זאת ידועה בשם: **משפט חפיפה ראשון**.

את משפט החפיפה הראשון מכנים בשם **צלע, זווית, צלע** ובקיצור: **צ.ז.צ.**



בשני המשולשים שבסרטוט ΔABC ΔDEF

מתקיימים השוויונות: $AC = DF$

$\sphericalangle A = \sphericalangle D$

$AB = DE$

לפי משפט חפיפה ראשון המשולשים חופפים.

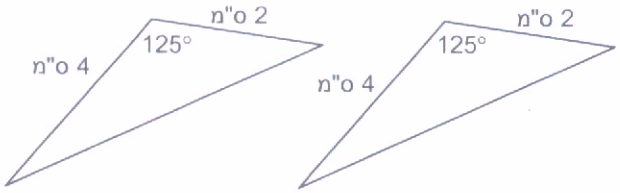
מסמנים: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ אומרים: ΔABC חופף ל- ΔDEF.

דוגמה 1

לפניכם סרטוטים מוקטנים של שני משולשים.

קבעו אם אלו משולשים חופפים.

התבססו על משפט חפיפה ראשון. הסבירו.



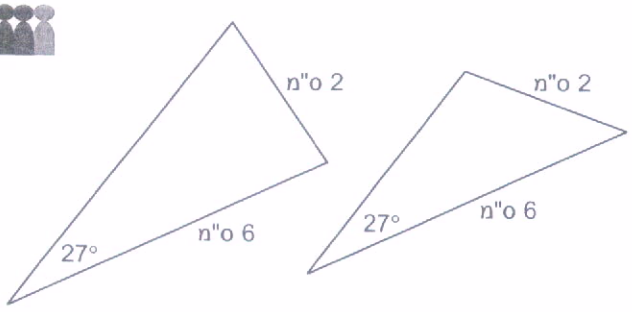
תשובה: שני המשולשים שווים בשתיים מצלעותיהם (2 ס"מ ו- 4 ס"מ)
ובזווית הכלואה ביניהן (°125).
לפי משפט חפיפה ראשון המשולשים חופפים.

דוגמה 2

לפניכם סרטוטים מוקטנים של שני משולשים.

קבעו אם אלו משולשים חופפים.

התבססו על משפט חפיפה ראשון. הסבירו.

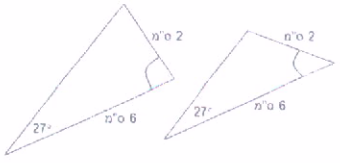


תשובה:

למרות שהמשולשים שווים בשתי צלעות ובזווית אחת הם אינם חופפים.

הזוויות הכלואות בין הצלעות השוות (צבועות בתכלת ובכתום) הן שונות.

הזווית השווה (בת °27) איננה בין הצלעות השוות.

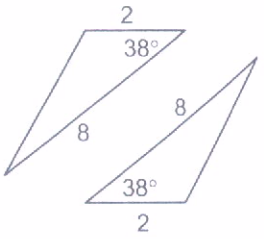


© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

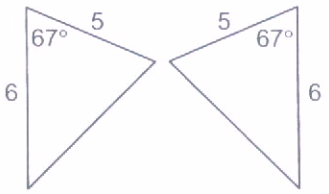
תרגילים

7. לפניכם סרטוטים מוקטנים של זוגות משולשים. אורכי הצלעות הם בס"מ.
קבעו לגבי כל זוג משולשים האם אפשר לקבוע לפי משפט חפיפה ראשון שהם חופפים. הסבירו.

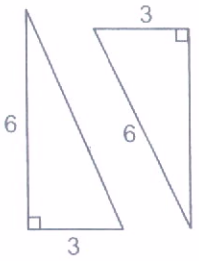
(א)



(ב)

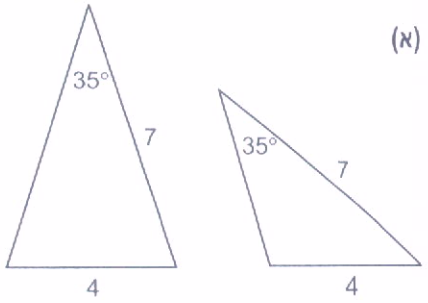


(ג)

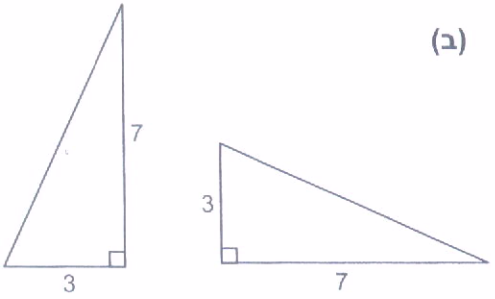


8. לפניכם סרטוטים מוקטנים של זוגות משולשים. אורכי הצלעות הם בס"מ.
קבעו לגבי כל זוג משולשים האם אפשר לקבוע לפי משפט חפיפה ראשון שהם חופפים. הסבירו.

(א)



(ב)

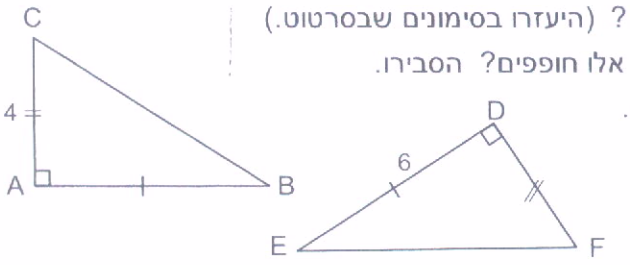


9. נתונים שני משולשים ΔABC ו- ΔDEF השווים בשלושה חלקים כמסומן בסרטוט (האורכים בס"מ).

(א) מה אורכו של DF ? מה אורכו של AB ? (היעזרו בסימונים שבסרטוט.)

(ב) האם לפי משפט חפיפה ראשון משולשים אלו חופפים? הסבירו.

(ג) אם כן, רשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.

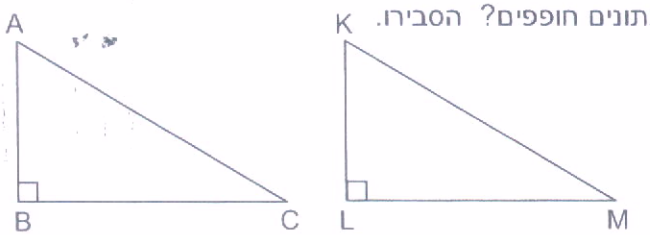


10. נתונים שני משולשים ישרי זווית ΔABC ו- ΔKLM השווים באורך הניצבים שלהם.

(א) האם לפי משפט חפיפה ראשון המשולשים הנתונים חופפים? הסבירו.

(ב) אם כן, רשמו את החפיפה בכתיב מתמטי.

(ג) נתון כי KL = 2 ס"מ.
מה אורך הצלע AB ?

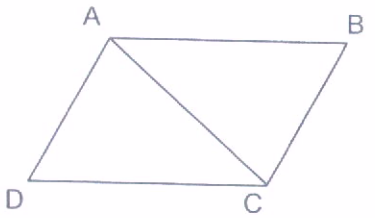


שני משולשים ישרי זווית, בהם אורך הניצבים של המשולש האחד שווה לאורך הניצבים של המשולש השני, הם משולשים חופפים.

© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

צלע משותפת

צלע השייכת לשני משולשים או יותר נקראת צלע משותפת.



דוגמה 3

נתבונן במרובע ABCD.

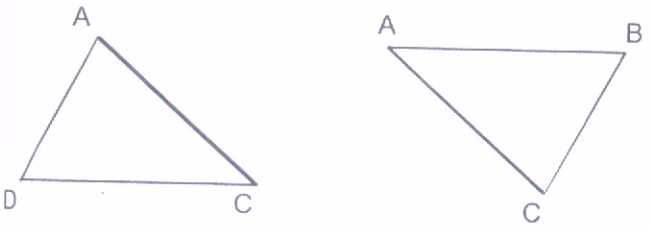
אלכסון המרובע מחלק אותו לשני משולשים:

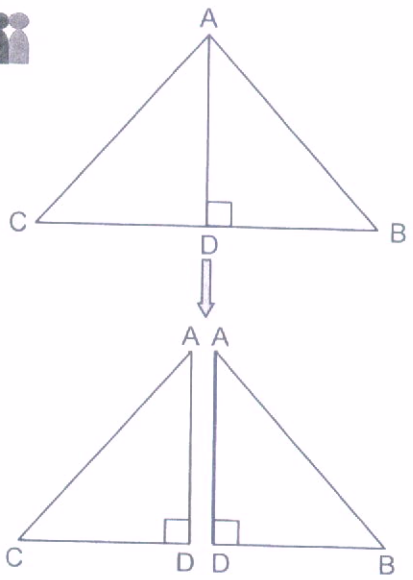
ΔACB ו- ΔCAD.

למשולשים אלה יש צלע משותפת. איזו היא?

צלע AC (מודגשת) היא צלע גם של משולש ABC וגם של משולש ADC.

AC היא צלע משותפת של שני המשולשים.





דוגמה 4

לפניכם משולש ABC.

הגובה AD מחלק את המשולש לשני משולשים:

ΔABD ו- ΔACD.

לשני המשולשים צלע משותפת. איזו היא?

נדמיין שאנחנו מפרידים בין המשולשים.

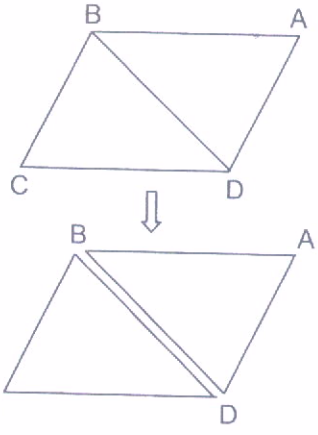
AD היא צלע גם של משולש ABD וגם של משולש ACD.

תרגיל

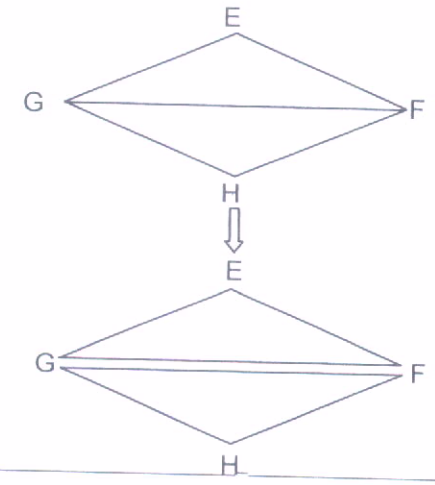
11. בכל אחד מהמרובעים שלפניכם האלכסון מחלק את המרובע לשני משולשים.

בכל סעיף רשמו מהי הצלע המשותפת לשני המשולשים.

(א)

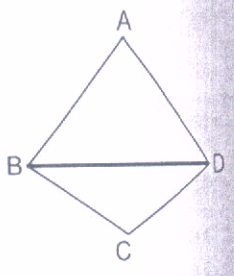


(ב)



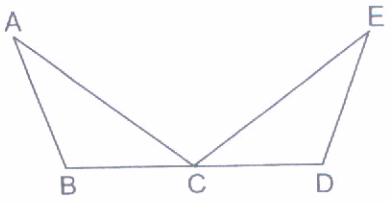
© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"

נדייק בזיהוי



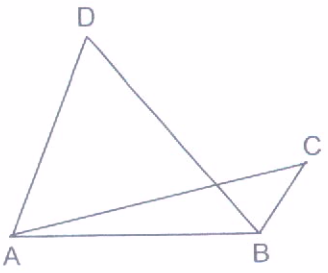
BD היא צלע גם של משולש ABD וגם של משולש CBD.

BD היא צלע משותפת לשני המשולשים.



האם למשולשים ABC ו- EDC יש צלע משותפת?

לשני המשולשים אין צלע משותפת. הסבירו.



האם למשולשים ABC ו- ABD יש צלע משותפת?

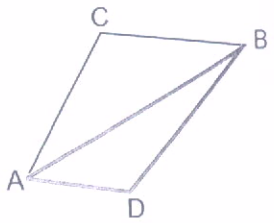
AB היא צלע משותפת של שני המשולשים.

12. בכל סרטוט יש משולש ששטחו צבוע בתכלת ומשולש שצלעותיו צבועות באדום.

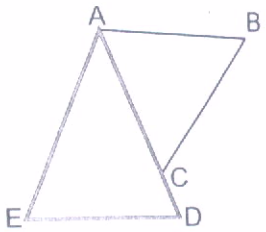
באילו סרטוטים יש לשני המשולשים צלע משותפת?

בסרטוטים בהם לשני המשולשים צלע משותפת רשמו איזו היא.

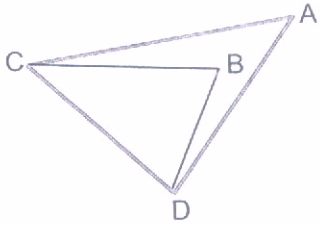
(א)



(ב)

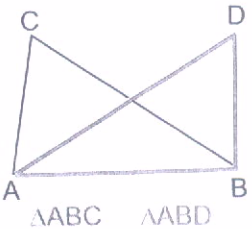


(ג)



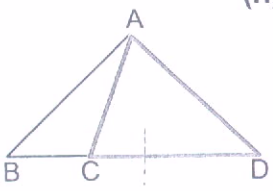
ΔACD ΔBCD

(ד)



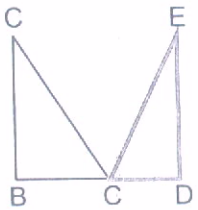
ΔABC ΔABD

(ה)

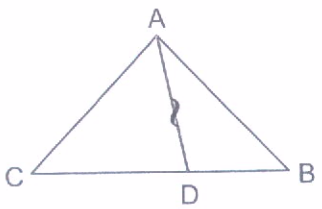


ΔABD ΔACD

(ו)



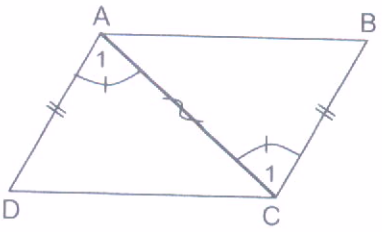
לעיתים מסמנים צלע משותפת ב- ~.



צלע AD הצבועה בכחול היא צלע משותפת של המשולשים ABD ו- ACD.

צלע זאת מסומנת ב- ~.

דוגמה 5



נתון מרובע ABCD.

אלכסון המרובע מחלק אותו לשני משולשים ΔABC ו- ΔCDA.

החלקים השווים מסומנים בסרטוט.

האם ΔABC חופף ל- ΔCDA ?

לפי הסימונים שבסרטוט שני המשולשים שווים בצלע ובזווית.

שני שוויונות אינם מספיקים לחפיפה. אבל בסרטוט זה יש לשני המשולשים צלע משותפת: AC.

לכן, שני המשולשים שווים בשתיים מצלעותיהם ובזווית הכלואה ביניהן.

$AD = CB$
$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle C_1$
$AC = AC$

על פי משפט חפיפה ראשון המשולשים חופפים.

13. לפניכם ארבעה סרטוטים. בכל אחד מהם שני משולשים.
בכל אחד מהסעיפים בדקו האם שני המשולשים הם חופפים.

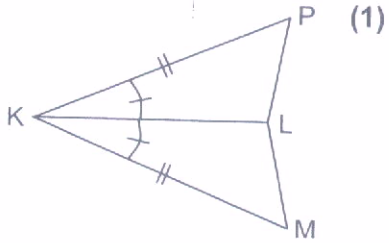
היעזרו בשאלות המנחות הבאות:

(א) כתבו את השוויונות המסומנים בסרטוט.

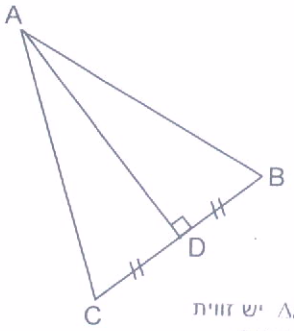
(ב) זהו את הצלע המשותפת לשני המשולשים.

(ג) האם ניתן להסיק, על סמך משפט חפיפה ראשון, כי שני המשולשים חופפים?

(1)

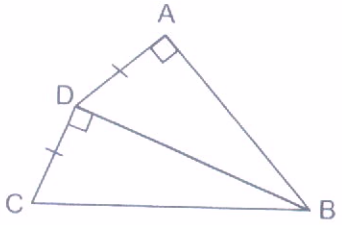


(2)

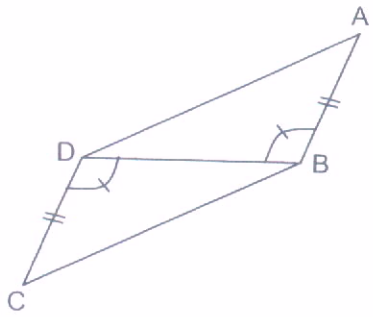


גם ב- ΔACD יש זווית ישרה. סמנו אותה.

(3)



(4)



14. לדני לוח עץ משולש כמתואר בסרטוט.

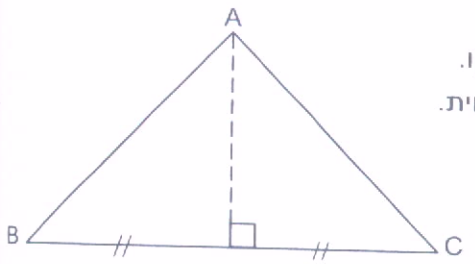
דני החליט לחלק את לוח העץ לשני חלקים.

הוא מדד את אורכו של לוח העץ וניסר אותו לאורך הקו המקווקו.

התקבלו שני חלקים שכל אחד מהם הוא בצורת משולש ישר זווית.

(א) האם שני החלקים חופפים? הסבירו.

(ב) האם $AB = AC$? הסבירו.



© כל הזכויות שמורות "קפיצה לגובה"